

## Data Structures and algorithms

Instructor : Dr.Amin Eskandari

Head-Ta's : Hamid Namjoo manesh , Amir Hossein Hemati , Ali Mojahed

Ta's : Amir Mohammad Asadjoo , Padina razmjooi , Armin Janfaza , Alireza Heydari , Mahdi Torabi ,

Maryam Ghorbani , Fatemeh Keshavarz , MohammadReza Fasli , Abolfazl Tadrissi

### Week 06 Questions

#### سوالات تکالیف هفته ۰۶

سوال اول ( ۱۰ امتیاز ) : گروه‌بندی عناصر با Union-Find

فرض کنید عناصر زیر در اختیار شما قرار دارند:

A , B , C , D , E

makeSet در ابتدا برای همه عناصر اجرا شده است یعنی هر عنصر در یک مجموعه جداگانه قرار دارد

سپس عملیات های زیر به ترتیب انجام می‌شوند:

Union(A, B)

Union(C, D)

Union(B, C)

به سؤالات زیر پاسخ دهید :

بعد از انجام تمام Union ها، چند مجموعه‌ی مجزا داریم؟

کدام عناصر در یک مجموعه مشترک قرار گرفته‌اند؟

آیا عناصر A , D در یک مجموعه هستند؟

توجه : پاسخ‌ها باید تشریحی باشند و نیازی به نوشتن کد نیست.

سوال دوم ( ۳۰ امتیاز ) : بررسی اتصال کاربران در شبکه

در یک شبکه اجتماعی، کاربران به تدریج به یکدیگر متصل می‌شوند. در ابتدا هر کاربر در یک مجموعه

جداگانه قرار دارد. سیستم باید بتواند بررسی کند که آیا دو کاربر خاص، به صورت مستقیم یا

غیرمستقیم (از طریق دوستان مشترک)، در یک گروه دوستانه قرار دارند یا خیر.

برای حل این مشکل از ساختار داده Disjoint Set (Union-Find) استفاده می‌شود.

دستورات:

(۱) CONNECT x y : اتصال کاربران x و y

(۲) CHECK x y : بررسی اینکه x و y در یک مجموعه هستند یا نه

(۳) EXIT : پایان ورودی

خروجی:

برای هر دستور CHECK ، اگر دو کاربر در یک مجموعه باشند YES و در غیر این صورت NO چاپ شود.

ورودی نمونه:

CONNECT A B

CONNECT C D

CHECK A C

CONNECT B C

CHECK A D

EXIT

خروجی نمونه:

NO

YES

سوال سوم ( ۵۰ امتیاز ) : اولین و آخرین وقوع یک عدد در آرایه مرتب

در یک سیستم آرشیو، لیستی از شناسه‌ها به صورت مرتب شده (غیرکاهشی) ذخیره شده است. ممکن است یک شناسه چندین بار تکرار شده باشد. سیستم از شما می‌خواهد با استفاده از جستجوی دودویی (Binary Search) ، اولین و آخرین محل وقوع یک عدد خاص را پیدا کنید.

به شما یک آرایه مرتب شده از اعداد (ممکن است شامل تکرار باشد) و یک عدد  $x$  داده می شود. با استفاده از جستجوی دودویی، اندیس اولین و آخرین وقوع عدد  $x$  را پیدا کنید. اگر عدد  $x$  در آرایه وجود نداشته باشد،  $-1$  چاپ کنید.

نکات مهم:

- اندیس ها از صفر شروع می شوند.
- آرایه به صورت غیرکاهشی (صعودی) مرتب شده است.
- استفاده از جستجوی خطی مجاز نیست.

فرمت ورودی:

- خط اول: عدد  $n$  تعداد عناصر آرایه
- خط دوم:  $n$  عدد آرایه (فاصله دار)
- خط سوم: عدد  $x$  ، عددی که باید جستجو شود

ورودی نمونه ۱:

7

1222345

2

خروجی نمونه:

1 3

ورودی نمونه ۲:

5

13579

4

خروجی نمونه :

-1 -1

الزامات سوال:

- حتماً باید از الگوریتم جستجوی دودویی استفاده شود.
  - می‌توانید از مفهوم lower\_bound و upper\_bound الهام بگیرید یا خودتان آن را پیاده کنید.
- 

سوال چهارم ( ۷۰ امتیاز ) : شمارش عناصر در بازه

در یک کتابخانه دیجیتال، شناسه کتاب‌ها به صورت آرایه مرتب شده (غیرکاهشی) ذخیره شده است. هر روز درخواست‌های زیادی می‌رسد که می‌پرسند: «چند کتاب با شناسه بین  $L$  و  $R$  وجود دارد؟» (شامل  $L$  و  $R$ )

ورودی:

- $n$  : تعداد کتاب‌ها
- $q$  : تعداد پرس‌وجوها
- آرایه  $A$  از  $n$  عدد مرتب شده
- $q$  خط : هر خط شامل  $L$  و  $R$  مرزهای بازه

خروجی:

برای هر پرس‌وجو، تعداد کتاب‌هایی که شناسه‌شان بین  $L$  و  $R$  است (شامل هر دو) را چاپ کنید. محدودیت: برای هر پرس‌وجو، جستجوی خطی مجاز نیست. باید از جستجوی دودویی استفاده شود.

ورودی نمونه:

10 4

1 2 2 2 3 5 7 7 8 10

2 2

2 6

0 1

7 100

خروجی نمونه:

3

5

1

4

سوال پنجم ( ۱۰۰ امتیاز ) : یافتن  $k$  امین عنصر کوچک با تضمین بدترین حالت

در یک سیستم تحلیل داده، لیستی بزرگ از اعداد به صورت نامرتب ذخیره شده است. سیستم نمی‌خواهد کل لیست را مرتب کند (چون پرهزینه است) و فقط نیاز دارد  $k$  امین کوچک‌ترین عنصر را پیدا کند.

اما شرط بسیار مهمی وجود دارد: الگوریتم باید حتی در بدترین حالت نیز زمان اجرای خطی  $O(n)$  داشته باشد.

وظیفه شما:

به شما یک آرایه نامرتب  $A$  با  $n$  عدد متمایز و یک عدد  $k$  ( با اندیس ۱-مبنا ) داده می‌شود. باید مقدار  $k$  امین کوچک‌ترین عنصر آرایه را پیدا کنید.

محدودیت‌های مهم:

- مرتب‌سازی کامل آرایه مجاز نیست.

- استفاده از Quickselect معمولی (نسخه ساده) قابل قبول نیست، زیرا تضمین بدترین حالت ندارد.

فرمت ورودی:

- خط اول: عدد  $n$  تعداد عناصر
- خط دوم:  $n$  عدد آرایه (نامرتب)
- خط سوم: عدد  $k$

ورودی نمونه:

9

1 2 8 15 20 3 4 10 7

4

خروجی نمونه:

4